

4. Дана функция  $f(x) = \sqrt{x}$ . Точки пересечения прямой  $x = m$  с графиком функции  $f$  и осью абсцисс обозначаются соответственно  $A(m)$  и  $B(m)$ , касательная к графику в точке  $A(m)$  обозначается  $l(m)$ .

а) Докажите, что площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $f$ , осью абсцисс и прямой  $x = m$ , равна  $\frac{2}{3}mf(m)$ .

б) Пусть  $C$  — точка пересечения прямой  $l(m)$  с осью абсцисс. Найдите отношение площадей криволинейного треугольника  $AOC$  и прямолинейного  $ABC$ .

в) Пусть  $M$  и  $N$  — точки графика функции  $f$ , такие, что прямая  $MN$  параллельна  $l(4)$ . Докажите, что площадь фигуры, ограниченной прямой  $MN$ , осью абсцисс и перпендикулярами к ней из точек  $M$  и  $N$ , не превосходит 32.

г) Пусть  $y = g(x)$  — непрерывная неотрицательная функция, определенная на  $[0; +\infty)$ , такая, что  $g(4) = 2$  и при любом  $m \geq 0$  площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $f$ , осями координат и прямой  $x = m$ , равна  $\frac{2}{3}mg(m)$ . Докажите, что  $g(x) = \sqrt{x}$ .