Профильно-элитарный выпускной экзамен по математике. Санкт-Петербург, 1999 год, вариант 2

Из предложенных сюжетов необходимо решить первые два, из оставшихся сюжетов следует выбрать один. Таким образом получится три сюжета: два обязательных и один выбранный. Всего 12 пунктов. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 пунктов из 12. Продолжительность экзамена 5 астрономических часов.

1. Дана функция $f(x)=ax-3^x$.

а) Решите неравенство $f(3x)\geqslant f(2x)+f(x)$.

б)Найдите все *a*, при которых уравнение $f(2x)=f(x)+f(x+1)$ имеет единственное решение.

в) Пусть $a=\dfrac{2}{3}$. Решите уравнение $\sqrt{-f(x)}=-x$.

г)Пусть $a=1$. Найдите с точность до $0,01$ положительный корень уравнения $f(x)=-729$.

2. Дана функция $f(x)=\cos^3 x-a\cos^2 x\sin x+b\cos x\sin^2 x-\sin^3 x$.

а)Найдите *a* и *b*, если известно, что числа $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{4}$ являются корнями функции *f*.

б) Пусть $a=b=-1$. Решите неравенство $f(x)\geqslant 0$.

в) Пусть $a=-3$. Решите уравнение $f(x)=\sin 3x$.

г) Найдите все пары (a,b), при которых период функции *f* равен $\dfrac{2\pi}{3}$.

3. 3А. Комплексное число $z=a+bi$ называется гауссовым, если *a* и *b* — целые числа. Говорят, что гауссово число *z* кратно числу *w*, если $z=wu$, где *w* и *u* — гауссовы числа. Пусть K — множество всех гауссовых чисел, кратных $1+2i$.

а) Найдите все натуральные *a*, такие что $a\leqslant 20$ и $2+ai\in K$.

б) Докажите, что если $z\in K$ и $\arg z=\dfrac{\pi}{4}$, то *z* кратно $3-i$.

в) Существуют ли числа $u,\ v\in K$, такие что $\arg\dfrac{u}{v}=\dfrac{\pi}{8}$?

г) Докажите, что для всякого гауссова числа *z* найдется число $w\in K$, такое что $|z-w|\leqslant 1$.

4. 3Б. Будем считать, что Земля имеет форму шара радиусом $R=6400$ км. Известно, что радиоволны, на которых ведется телевещание, распространяются по прямой. Предположим, что телепередатчик расположен на высоте *h* от земной поверхности. Обозначим через $l(h)$ расстояние по поверхности Земли от основания телебашни (или от той точки Земли, которая расположена ближе всего к ретрансляционному спутнику) до самой дальней точки, в которой возможен прием телепередачи.

а)Найдите наименьшее значение *h*, при котором прием возможен во всех точках некоторого меридиана севернее 60° ю.ш. и южнее 60° с.ш., если спутник висит над экватором?

б) Докажите, что $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{l(h)}{\sqrt{2Rh}}=1$.

в)Предположим, что передатчик размещен на Луне (т.е. на расстоянии 400000км от центра Земли). Покажите, что в этом случае $l(h)$ меньше четверти длины экватора по крайней мере на 100 км.

г)Для того, чтобы обеспечить связь между двумя пунктами, расположенными на расстоянии 1600км друг от друга, решено построить радиорелейную линию. Докажите, что если высота мачт этой линии равна 31,25 метра, то потребуются не менее 41 таких мачт.

5. Пусть $p_n(x)$ — многочлен степени *n*.

а)Известно, что числа 3 и 7 являются корнями многочлена $p_2(x)$ и что $p_2'(3)=11$. Найдите $p_2'(7)$.

б)Известно, что числа 1 и 2 являются корнями многочлена $p_3(x)$. Пусть $p_3'(1)=k$ и $p_3'(2)=l$, причем $kl>0$. Докажите, что число, делящее отрезок $[1;2]$ в отношении $k:l$, является третьим корнем этого многочлена.

в)Пусть $p_3(x)=x^3-3x^2-1$. Найдите все *a*, при которых многочлен $p_3(x)+ax$ имеет ровно два действительных корня.

г)Пусть $p_{1000}(x)=x(x-2)...(x-1998)$. Найдите все $a\geqslant 0$, при которых уравнение $p_{1000}(x)=a$ имеет 1000 различных действительных корней.