Профильно-элитарный выпускной экзамен по математике. Санкт-Петербург, 1992 год, вариант 2

Из предложенных сюжетов необходимо решить первые два, из оставшихся сюжетов следует выбрать один. Таким образом получится три сюжета: два обязательных и один выбранный. Всего 12 пунктов. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 пунктов из 12.
Продолжительность экзамена 5 астрономических часов.

1. Дана функция $f(x)=\log_2 x \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^7 x} \log_4 \frac{x^2}{2^{16}}$.

а) Решите неравенство $f(x) \geqslant 0$.

б) Решите уравнение $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

в) При каких значениях a уравнение $f(x)=a$ имеет ровно два различных корня?

г) Пусть $n(b)$, где $b>0$ и $b \neq 1$, — число различных корней уравнения $f(x)=f(bx)$. Постройте график функции n.

2. Даны функции $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos 2x$.

а) Вычислите площадь фигуры, которая ограничена графиками данных функций и прямыми $x=\pi$ и $x=\frac{7\pi}{6}$.

б) Пусть $A(m)$ и $B(m)$— точки пересечения прямой $x=m$ с графиками функций f и g. При каких m длина отрезка с концами в этих точках равна единице?

в) Существует ли отрезок, концы которого лежат на графике функции f, а середина совпадает с точкой $M\left(\frac{13\pi}{12}, \frac{1}{4}\right)$?

г) Изобразите на координатной плоскости множество середин отрезков, концы которых лежат на графике функции f.

3. 3. Последовательность $\{x_n\}$ задана формулой $x_n=nx_{n-1}-1$, а $x_0=c$.

а) Докажите, что если $c \leqslant 1$, то данная последовательность монотонна.

б) Докажите, что если $c>2$, то при всех натуральных n верно неравенство $|x_n/n!| \leqslant c$.

в) Докажите, что если последовательность $\{x_n\}$ сходящаяся, то она стремится к нулю.

г) Докажите, что если число c рационально, то эта последовательность не имеет конечного предела.

4. 4. Пусть $A(2z+1)$, $B(z+2)$, $C(z^2+2z)$ — точки плоскости (здесь z— комплексное число).

а) Докажите, что если $|z|=1$, то $OA=OB$ (O— начало координат).

б) Докажите, что треугольник
ABC подобен треугольнику с вершинами в точках 0, 1 и $-(z+1)$ комплексной плоскости.

в) Пусть $|z|=1$. Найдите множество значений радиусов окружностей, описанных около треугольника ABC.

г) При каком значении z, где $|z|=1$, площадь треугольника ABC принимает наибольшее значение?

5. 5.Назовем расстоянием между точками поверхности параллелепипеда длину кратчайшей ломаной на его поверхности, соединяющей эти точки. Пусть E и W— противоположные вершины параллелепипеда.

а) Найдите расстояние между вершинами E и W единичного куба.

б)При каких значениях a и b расстояние между вершинами E и W прямоугольного параллелепипеда единичного объема с длинами ребер a, a, b будет наименьшим?

в)Докажите, что расстояние между любыми парами точек поверхности единичного куба не превосходит расстояния между точками E и W.

г)Найдите длины ребер прямоугольного параллелепипеда единичного объема, расстояние между вершинами E и W которого принимает наименьшее значение.