Выпускной экзамен по математике. Математические классы, Санкт-Петербург, 1996 год, вариант 2

Из предложенных сюжетов необходимо решить первые два, из оставшихся сюжетов следует выбрать один. Таким образом получится три сюжета: два обязательных и один выбранный. Всего 12 пунктов. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 пунктов из 12.
Продолжительность экзамена 5 астрономических часов.

1. 1. Дана функция $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{\cos x}$.

а) Решите уравнение $f(x)=-1$.

б) Решите неравенство $f(x)\geqslant 0$ на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{5\pi}{4}\right]$.

в) Сравните числа $f\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$ и -1.

г) Найдите множество значений функции $f(x)$.

2. 2. Дана функция $f(x)=\log_3\dfrac{x}{3}\cdot\log_3 x$.

а) Решите неравенства $f(x)>6$.

б) Решите уравнение $|f(x)|=f\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

в) Найдите промежутки монотонности функции $f(x)$.

г) Выясните, сколько корней имеет уравнение $f(x)=f(x\cdot a^{-1})$ в зависимости от a (при $a>0$).

3. 3А. Рассматриваются комплексные числа z и $u=z-\dfrac{3}{z}$.

а) Запишите в алгебраической форме все числа z такие, что $u=-4i$.

б) Изобразите на чертеже совокупность всех чисел z таких, что $\arg z=\dfrac{3\pi}{2}$ и $|u|\leqslant 4$.

в) Пусть $|z|\geqslant 1$. Найдите наибольшее значение расстояния между точками комплексной плоскости, соответствующими z и u.

г)Пусть $|z|=1$. Найдите наибольшее значение площади треугольника с вершинами в точках, соответствующих $-\dfrac{3}{z}$ и u, и начале координат O.

4. 3Б. Дана функция $f(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$.

а) Напишите уравнения касательных к графику функции $f(x)$, параллельных оси абсцисс.

б) Постройте график функции $f(x)$ на отрезке $[-3;\ 3]$.

в) Докажите, что $\displaystyle\int\limits_{-0,5}^{1} f(x)dx<\dfrac{15}{4}$.

г)Найдите наименьшее значение площади фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$ и прямыми $y=0,\ x=a,\ x=a+1,5,$ для $a>-1$.

5. 3В. Дана функция $f(x)=\sqrt{1-2x}$.

а) Решите уравнение $(3-f(x))(f(x)+0,75x)=0$.

б) Изобразите на чертеже множество всех точек с координатами $(x;\ y)$ такими, что $-0,75x\leqslant y\leqslant f(x)$.

в)Наудачу выбирается целое число a из отрезка $[-12;\ 12]$. Определите вероятность того, что уравнение $f(x)=a$ имеет целое решение.

г) Найдите все значения параметра a такие, что уравнение $f(x)=ax$ не имеет решений на отрезке $[-4;\ 0]$.