

Выпускной экзамен по математике. Базовые классы, Санкт-Петербург, 1995 год, вариант 2

Из предложенных сюжетов необходимо решить первые два, из оставшихся сюжетов следует выбрать один. Таким образом получится три сюжета: два обязательных и один выбранный. Всего 12 пунктов. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 пунктов из 12. Продолжительность экзамена 5 астрономических часов.

1. 1. Дана функция $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

а) Вычислите $f\left(\log_3 \frac{1}{54} + \log_3 2\right)$.

б) Решите уравнение $f(-3-x) - f(x) = -6$.

в) Решите неравенство $f(-3-x) - f(x) \geq -6$.

г) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} f(y) - f(x) = -6, \\ f(x+y) = 24. \end{cases}$$

2. 2. Дана функция $f(x) = \sin x$.

а) Вычислите значение $\cos 2\alpha$, если известно, что $f(\alpha) = \frac{1}{4}$.

б) Решите уравнение $f(3x) - f(x) = \cos 2x$.

в) Докажите, что $f(3x) - f(x) - \cos 2x = (1 - 2\sin^2 x)(2\sin x - 1)$.

г) Решите неравенство $\frac{f(3x) - f(x) - \cos 2x}{\cos 2x} < 0$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. 3.А. Дана функция $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{b-2x}$.

а) Найдите все значения параметра b такие, что число $x_0 = -2$ является корнем уравнения $f(x) = -2$.

б) Пусть $b = 5$. Решите уравнение $f(x) = -2$.

в) Пусть $b = 5$. Сравните числа $|f(2)|$ и $|f(0)|$.

г) Найдите все значения параметра b такие, что область определения функции $y = f(x)$ является отрезком.

4. 3.Б. Дана функция $f(x) = x^2 + 3x$.

а) Найдите первообразную $y = F(x)$ функции $y = f(x)$, график которой проходит через точку с координатами $(-6; -18)$.

б) Постройте график найденной первообразной.

в) Найдите уравнение касательной к графику найденной первообразной $y = F(x)$ в его точке с абсциссой $x_0 = 0$.

г) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = -f(x)$, $y = F(x)$ и отрезком $[-3; 0]$ оси абсцисс.