

## Профильно-элитарный выпускной экзамен по математике. Санкт-Петербург, 1992 год, вариант 2

Из предложенных сюжетов необходимо решить первые два, из оставшихся сюжетов следует выбрать один. Таким образом получится три сюжета: два обязательных и один выбранный. Всего 12 пунктов. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 пунктов из 12.  
Продолжительность экзамена 5 астрономических часов.

1. Дана функция  $f(x) = \log_2 x \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{27x} \log_4 \frac{x^2}{2^{16}}$ .

а) Решите неравенство  $f(x) \geq 0$ .

б) Решите уравнение  $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ .

в) При каких значениях  $a$  уравнение  $f(x) = a$  имеет ровно два различных корня?

г) Пусть  $n(b)$ , где  $b > 0$  и  $b \neq 1$ , — число различных корней уравнения  $f(x) = f(bx)$ . Постройте график функции  $n$ .

2. Даны функции  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = \cos 2x$ .

а) Вычислите площадь фигуры, которая ограничена графиками данных функций и прямыми  $x = \pi$  и  $x = \frac{7\pi}{6}$ .

б) Пусть  $A(m)$  и  $B(m)$  — точки пересечения прямой  $x = m$  с графиками функций  $f$  и  $g$ . При каких  $m$  длина отрезка с концами в этих точках равна единице?

в) Существует ли отрезок, концы которого лежат на графике функции  $f$ , а середина совпадает с точкой  $M\left(\frac{13\pi}{12}, \frac{1}{4}\right)$ ?

г) Изобразите на координатной плоскости множество середин отрезков, концы которых лежат на графике функции  $f$ .

3. 3. Последовательность  $\{x_n\}$  задана формулой  $x_n = nx_{n-1} - 1$ , а  $x_0 = c$ .

а) Докажите, что если  $c \leq 1$ , то данная последовательность монотонна.

б) Докажите, что если  $c > 2$ , то при всех натуральных  $n$  верно неравенство  $|x_n/n!| \leq c$ .

в) Докажите, что если последовательность  $\{x_n\}$  сходящаяся, то она стремится к нулю.

г) Докажите, что если число  $c$  рационально, то эта последовательность не имеет конечного предела.

4. 4. Пусть  $A(2z+1)$ ,  $B(z+2)$ ,  $C(z^2+2z)$  — точки плоскости (здесь  $z$  — комплексное число).

а) Докажите, что если  $|z| = 1$ , то  $OA = OB$  ( $O$  — начало координат).

б) Докажите, что треугольник

$ABC$  подобен треугольнику с вершинами в точках  $0$ ,  $1$  и  $-(z+1)$  комплексной плоскости.

в) Пусть  $|z| = 1$ . Найдите множество значений радиусов окружностей, описанных около треугольника  $ABC$ .

г) При каком значении  $z$ , где  $|z| = 1$ , площадь треугольника  $ABC$  принимает наибольшее значение?

5. 5. Назовем расстоянием между точками поверхности параллелепипеда длину кратчайшей ломаной на его поверхности, соединяющей эти точки. Пусть  $E$  и  $W$  — противоположные вершины параллелепипеда.

а) Найдите расстояние между вершинами  $E$  и  $W$  единичного куба.

б) При каких значениях  $a$  и  $b$  расстояние между вершинами  $E$  и  $W$  прямоугольного параллелепипеда единичного объема с длинами ребер  $a$ ,  $a$ ,  $b$  будет наименьшим?

в) Докажите, что расстояние между любыми парами точек поверхности единичного куба не превосходит расстояния между точками  $E$  и  $W$ .

г) Найдите длины ребер прямоугольного параллелепипеда единичного объема, расстояние между вершинами  $E$  и  $W$  которого принимает наименьшее значение.