

## Профильно-элитарный выпускной экзамен по математике. Санкт-Петербург, 1994 год, вариант 1

Из предложенных сюжетов необходимо решить первые два, из оставшихся сюжетов следует выбрать один. Таким образом получится три сюжета: два обязательных и один выбранный. Всего 12 пунктов. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 пунктов из 12.

Продолжительность экзамена 5 астрономических часов.

1. Дана функция  $f(x) = \log_2 x + \log_{2x} x$ .

а) Докажите, что числа  $x$  и  $\frac{1}{4x}$  входят (либо не входят) в область определения функции  $f$  одновременно и  $f\left(\frac{1}{4x}\right) = -f(x)$ .

б) Решите уравнение  $|f(x)| = f(2)$ .

в) Докажите, что для любого натурального числа  $n \geq 2$  уравнение  $f(x) = f(x^n)$  имеет ровно одно решение на луче  $[1; +\infty)$ .

г) Найдите все такие  $a$ , при которых уравнение  $f(x) = a \log_2^2 2x$  имеет три решения.

2. Дана функция  $f(x) = \cos ax + \cos 2ax$ .

а) Пусть  $a = 1$ . Решите уравнение  $f(x) = f(3x)$ .

б) Найдите все такие  $a$ , при которых  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ .

в) Найдите все такие  $a$ , при которых  $f(x) > 0$  при всех  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

г) Найдите все такие  $a$ , при которых график функции  $f$  имеет центр симметрии.

3. 3. Дана функция  $f(x) = ax - 2\sqrt{x+1}$ ,  $a > 0$ .

а) Найдите все такие  $a$ , при которых функция  $f$  монотонна на луче  $[0; +\infty)$ .

б) Пусть  $a = 1$ . Найдите уравнения касательных к графику данной функции, проходящих через точку  $A(5, 0)$ .

в) Пусть  $a = 1$ . Найдите все точки оси абсцисс, через которые проходит ровно одна касательная к графику функции  $f$ .

г) Найдите (при произвольном  $a > 0$ ) такое значение  $x_0$ , при котором фигура, ограниченная прямой, касающейся графика функции  $f$  в точке с абсциссой  $x_0$ , самим этим графиком и прямыми  $x = -1$ ,  $x = 2$ , имеет наименьшую площадь.

4. 4. Пусть  $a, b, c$  — длины некоторых отрезков.

а) Докажите, что если  $a = \sqrt[5]{2}$ ,  $b = \sqrt[5]{3}$ ,  $c = \sqrt[5]{7}$ , то треугольник, который можно составить из этих отрезков, остроугольный.

б) Выясните, существует ли треугольник со сторонами  $a = 19^{21}$ ,  $b = 20^{21}$ ,  $c = 21^{21}$ .

в) Докажите, что если для любого натурального числа  $n$  существует треугольник со сторонами  $a^n$ ,  $b^n$ ,  $c^n$ , то все эти треугольники равнобедренные.

г) Пусть  $\varphi_n$  — угол треугольника со сторонами  $a = 1$ ,  $b = \sqrt[n]{2}$ ,  $c = \sqrt[n]{4}$  ( $n \geq 2$ ), лежащий против средней из них. Докажите, что последовательность  $\{\varphi_n\}$  монотонна, и вычислите ее предел.

5. 5. Пусть  $A(i-1)$ ,  $B(2i-1)$ ,  $C(2-3i)$  — точки плоскости, соответствующие указанным комплексным числам,  $S$  — окружность  $|z| = 1$ , а  $D$  — множество комплексных чисел, заданное неравенством  $|2z-1| \leq 1$ .

а) Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки  $P \in S$  до точек  $A, B, C$  постоянна.

б) Изобразите на плоскости точки  $A, B$  и множество комплексных чисел вида  $z(2i-1) + (1-z)(i-1)$ , где  $z \in D$ .

в) Найдите такую точку  $E \in D$  и все такие равнобедренные треугольники с вершинами на  $S$ , для которых сумма квадратов расстояний от их вершин до  $E$  наибольшая.

г) Выясните, верно ли, что для всякой точки  $w$ , лежащей в треугольнике  $ABC$ , найдется такое число  $z \in D$ , что  $w = zz_k + (1-z)z_j$ , где  $z_k, z_j \in \{i-1, 2i-1, 2-3i\}$ .