Профильно-элитарный выпускной экзамен по математике. Санкт-Петербург, 1991 год, вариант 2

1. Дана функция $f(x)=\log_3^3 x-5\log_3^2 x+8\log_3 x$.

а) Решите неравенство $f(x)<0$.

б) Решите уравнение $f(x)=4$.

в)Выясните, при каких значениях a неравенство $f(x)>a\log_3 x$ выполняется при всех x из множества $[27;+\infty)$.

г) Выясните, сколько корней имеет уравнение $f(x)=a$ в зависимости от a.

2. Дана функция $f(x)=\cos x\cos 3x$.

а) Решите уравнение $f(x)=-\dfrac{1}{2}$.

б) Найдите наименьшее положительное решение системы

$$\begin{cases} f(x)=0, \\ \sin 5x=1. \end{cases}$$

в) Найдите область значений функции f.

г)Пусть $g(t)$— наибольшее значение f на отрезке $\left[t;t+\dfrac{\pi}{2}\right]$. Найдите наименьшее значение функции g на множестве вещественных чисел.

3. 3. Даны три комплексных числа: $z_1=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+3i),\ z_2=\dfrac{1}{2}(-\sqrt{3}+i),\ z_3=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}-i)$.

а) Найдите расстояние от точки z_1 до фигуры, задаваемой уравнением $|z-z_3|=1$.

б) Изобразите множество точек z комплексной плоскости, таких, что $|z_2z-z_1z_2|=|z_3z-z_2z_3|$.

в)Пусть z пробегает все точки отрезка с концами $z_2,\ z_3$, а U и V— множества точек, которые пробегают при этом $u=z_2z$ и $v=z_3z$. Изобразите пересечение множеств U и V.

г) Пусть z пробегает все точки отрезка с концами $z_1,\ z_3$. Изобразите множество всех точек, которое пробегает при этом $w=z^2$.

4. 4.Дана функция $f(x)=\sqrt{x}$. Точки пересечения прямой $x=m$ с графиком функции f и осью абсцисс обозначаются соответственно $A(m)$ и $B(m)$, касательная к графику в точке $A(m)$ обозначается $l(m)$.

а) Докажите, что площадь фигуры, ограниченной графиком функции f, осью абсцисс и прямой $x=m$, равна $\dfrac{2}{3}mf(m)$.

б) Пусть C— точка пересечения прямой $l(m)$ с осью абсцисс. Найдите отношение площадей криволинейного треугольника AOC и прямолинейного ABC.

в) Пусть M и N— точки графика функции f, такие, что прямая MN параллельна $l(4)$. Докажите, что площадь фигуры, ограниченной прямой MN, осью абсцисс и перпендикулярами к ней из точек M и N, не превосходит 32.

г) Пусть $y=g(x)$— непрерывная неотрицательная функция, определенная на $[0;+\infty)$, такая, что $g(4)=2$ и при любом $m\geqslant 0$ площадь фигуры, ограниченной графиком функции f, осями координат и прямой $x=m$, равна $\dfrac{2}{3}mg(m)$. Докажите, что $g(x)=\sqrt{x}$.

5. 5. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентно: $x_1=a,\ x_{n+1}=x_n^2-x_n-3$ при всех $n\in\mathbb{N}$.

а) Докажите, что если a— целое, то x_n— нечетное число при всех $n\geqslant 2$.

б) Выясните, при каком значении a последовательность $\{x_n\}$ является стационарной.

в) Выясните, при каких значениях a последовательность $\{x_n\}$ является геометрической прогрессией.

г) Пусть $a=4$. Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ не имеет предела.