

**Выпускной экзамен по математике. Базовые классы, Санкт-Петербург, 2001 год, вариант 1**

Из предложенных сюжетов необходимо решить первые два, из оставшихся сюжетов следует выбрать один. Таким образом получится три сюжета: два обязательных и один выбранный. Всего 12 пунктов. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 пунктов из 12.

Продолжительность экзамена 5 астрономических часов.

1. 1. Дана функция  $f(x) = \log_2(x-3) + \log_2(x-7)$ .

а) Найдите все значения  $a$  такие, что  $x = 11$  является корнем уравнения  $f(x) = a$ .

б) Решите уравнение  $f(x) = 5$ .

в) Решите неравенство  $f(x) < 5$ .

г) Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} f(x) = y, \\ 4^y - 31 \cdot 2^y = 32. \end{cases}$$

2. 2. Дана функция  $f(x) = \sqrt{21 + 4x - x^2}$ .

а) Найдите область определения данной функции.

б) Решите уравнение  $f(x) = 1 - 3x$ .

в) Сравните числа  $f(3) + f(5)$  и  $2f(4)$ .

г) Найдите все числа  $x$  такие, что выполняется равенство  $f(x-1) = f(5-x)$ .

3. 3. Дана функция  $f(x) = \sin 3x - \sin x$ .

а) Докажите, что  $\frac{f(x)}{f(x + \frac{\pi}{2})} = -\operatorname{tg} x$ .

б) Вычислите  $f(\alpha)$ , если  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ .

в) Решите уравнение  $f(x) = \sin 2x$ .

г) Решите неравенство  $\frac{f(x)}{\sin x} \geq -1$  на отрезке  $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$ .

4. 4. Дана функция  $f(x) = x - \frac{x^3}{3}$ .

а) Найдите координаты точек пересечения графика функции  $y = f(x)$  с осями координат.

б) Исследуйте функцию  $y = f(x)$  на монотонность.

в) Постройте график функции  $y = f(x)$ .

г) Образующая конуса равна  $\sqrt{3}$ . Найдите наибольший возможный объем такого конуса.