

**Выпускной экзамен по математике. Базовые классы, Санкт-Петербург, 1996 год, вариант 2**

Из предложенных сюжетов необходимо решить первые два, из оставшихся сюжетов следует выбрать один. Таким образом получится три сюжета: два обязательных и один выбранный. Всего 12 пунктов. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 пунктов из 12. Продолжительность экзамена 5 астрономических часов.

1. 1. Дана функция  $f(x) = \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x$ .

а) Решите уравнение  $f(x) = 1 + \cos 2x$  на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

б) Пусть  $g(x) = f\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - f\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ . Вычислите  $g\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ .

в) Докажите, что  $\frac{2f(x)}{g(x)} = \operatorname{tg} x + 1$ .

г) Решите неравенство  $\frac{2f(x)}{g(x)} \geq 0$  на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

2. 2. Дана функция  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 7x + 10)$ .

а) Найдите область определения функции  $y = f(x)$ .

б) Вычислите  $f(10) - f(7)$ .

в) Решите уравнение  $9^{1+f(x)} + 8 \cdot 3^{f(x)} - 1 = 0$ .

г) Решите неравенство  $9^{1+f(x)} + 8 \cdot 3^{f(x)} \geq 1$ .

3. 3.А. Дана функция  $f(x) = \sqrt{8+x} - \sqrt{2-x}$ .

а) Найдите все координаты точек пересечения графика функции  $y = f(x)$  с осями координат.

б) Сравните числа  $|f(-1)|$  и  $|f(-4)|$ .

в) Решите уравнение  $f(x) = \sqrt{-3-x}$ .

г) Найдите область определения функции  $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ .

4. 3.Б. Дана функция  $f(x) = 3x^2 - x^3 - 3x$ .

а) Напишите уравнение прямой  $m$ , касающейся графика функции  $y = f(x)$  в его точке с абсциссой  $x_0 = 1$ .

б) Постройте график функции  $y = f(x)$  и прямую  $m$ .

в) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $y = f(x)$ , прямой  $m$  и осью  $Ox$ .

г) Найдите все значения параметра  $b$  такие, что уравнение  $\frac{f(x)}{x} = b$  имеет ровно одно решение.