

**Выпускной экзамен по математике. Математические классы, Санкт-Петербург, 1996 год,
вариант 2**

Из предложенных сюжетов необходимо решить первые два, из оставшихся сюжетов следует выбрать один. Таким образом получится три сюжета: два обязательных и один выбранный. Всего 12 пунктов. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 пунктов из 12. Продолжительность экзамена 5 астрономических часов.

1. 1. Дана функция $f(x) = \frac{\cos 2x}{\cos x}$.

а) Решите уравнение $f(x) = -1$.

б) Решите неравенство $f(x) \geq 0$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}\right]$.

в) Сравните числа $f\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ и -1 .

г) Найдите множество значений функции $f(x)$.

2. 2. Дана функция $f(x) = \log_3 \frac{x}{3} \cdot \log_3 x$.

а) Решите неравенства $f(x) > 6$.

б) Решите уравнение $|f(x)| = f\left(\frac{x}{3}\right)$.

в) Найдите промежутки монотонности функции $f(x)$.

г) Выясните, сколько корней имеет уравнение $f(x) = f(x \cdot a^{-1})$ в зависимости от a (при $a > 0$).

3. 3А. Рассматриваются комплексные числа z и $u = z - \frac{3}{z}$.

а) Запишите в алгебраической форме все числа z такие, что $u = -4i$.

б) Изобразите на чертеже совокупность всех чисел z таких, что $\arg z = \frac{3\pi}{2}$ и $|u| \leq 4$.

в) Пусть $|z| \geq 1$. Найдите наибольшее значение расстояния между точками комплексной плоскости, соответствующими z и u .

г) Пусть $|z| = 1$. Найдите наибольшее значение площади треугольника с вершинами в точках, соответствующих $-\frac{3}{z}$ и u , и начале координат O .

4. 3Б. Дана функция $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$.

а) Напишите уравнения касательных к графику функции $f(x)$, параллельных оси абсцисс.

б) Постройте график функции $f(x)$ на отрезке $[-3; 3]$.

в) Докажите, что $\int_{-0,5}^1 f(x) dx < \frac{15}{4}$.

г) Найдите наименьшее значение площади фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = a + 1,5$, для $a > -1$.

5. 3В. Дана функция $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$.

а) Решите уравнение $(3 - f(x))(f(x) + 0,75x) = 0$.

б) Изобразите на чертеже множество всех точек с координатами $(x; y)$ такими, что $-0,75x \leq y \leq f(x)$.

в) Наудачу выбирается целое число a из отрезка $[-12; 12]$. Определите вероятность того, что уравнение $f(x) = a$ имеет целое решение.

г) Найдите все значения параметра a такие, что уравнение $f(x) = ax$ не имеет решений на отрезке $[-4; 0]$.