

## Выпускной экзамен по математике. Математические классы, Санкт-Петербург, 1992 год, вариант 1

Из предложенных сюжетов необходимо решить первые два, из оставшихся сюжетов следует выбрать один. Таким образом получится три сюжета: два обязательных и один выбранный. Всего 12 пунктов. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 пунктов из 12.

Продолжительность экзамена 5 астрономических часов.

1. 1. Дана функция  $f(x) = \frac{\sqrt{3} + 2 \cos x}{2 \cos x - \sqrt{3}}$ .

а) Решите уравнение:  $f(x) = -1$ .

б) Найдите все решения неравенства  $f(x) \geq 0$  из отрезка  $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ .

в) Докажите, что  $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{12} + \frac{x}{2}\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{2}\right)$ .

г) Найдите множество значений функции  $f$  на отрезке  $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ .

2. 2. Дана функция:  $f(x) = \log_2(4 - x^2)$ .

а) Решите неравенство:  $f(x) \leq 0$ .

б) Решите уравнение:  $f(x) = 2 \log_2(7 - 4x)$ .

в) Найдите промежутки монотонности функции  $f$ .

г) Выясните, сколько корней имеет уравнение  $f(x) = a$  (в зависимости от  $a$ ).

3. 3А. Дана функция  $f(x) = x - \sqrt{x+2}$ .

а) Напишите уравнение касательной  $l$  к графику функции  $f$  в точке с абсциссой 7.

б) Найдите наименьшее и наибольшее значение функции  $f$  на отрезке  $[-2; 2]$ .

в) Постройте график функции  $f$  на отрезке  $[-2; 8]$ .

г) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $f$ , касательной  $l$  и осью абсцисс.

4. 3Б. Даны комплексные числа  $z_0 = i$  и  $z_1 = \sqrt{3}$ .

а) Изобразите на чертеже множество  $M$  всех таких комплексных чисел  $z$ , что  $|z - z_0| = 1$ .

б) Изобразите на чертеже множество  $K$  всех таких комплексных чисел  $z$ , что  $|z - z_0| = |z - z_1|$ .

в) Найдите все числа, содержащиеся и в  $K$ , и в  $M$ .

г) Среди чисел, принадлежащих множеству  $K$ , найдите число с наименьшим модулем.

5. 3В. Дана функция  $f(x) = x^3 - (a+1)x^2 + (a^2-3)x + 2$ .

а) Решите уравнение  $f(x) = 0$  при  $a = 2$ .

б) Решите относительно  $a$  неравенство  $f(a) \geq 0$ .

в) Решите уравнение  $f(x) = 0$  при условии, что один из его корней равен 2.

г) Выясните, при каких значениях  $a$  уравнение  $f(x) = b$  имеет единственный корень при любом  $b$ .