Выпускной экзамен по математике. Математические классы, Санкт-Петербург, 1995 год, вариант 1

Из предложенных сюжетов необходимо решить первые два, из оставшихся сюжетов следует выбрать один. Таким образом получится три сюжета: два обязательных и один выбранный. Всего 12 пунктов. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 пунктов из 12. Продолжительность экзамена 5 астрономических часов.

1. 1. Дана функция $f(x)=\log_2(x+2)-\log_2(x-1)$.

а) Решите неравенство $f(x)>1$.

б) Решите уравнение $f(x)=\log_4(4x^2)$.

в) Выясните, какое из чисел ближе к единице — $f(3)$ или $f(5)$.

г) Найдите множество значений функции $f(x)$.

2. 2. Дана функция $f(x)=2\sin^2 x-\sin 2x$

а) Вычислите $f\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

б) Решите уравнение $f(x)=4\cos^2 x$.

в) Найдите наименьшее значение функции $f(x)$.

г) Найдите все положительные числа a такие, что выполнения неравенства $\left|x-\frac{3\pi}{8}\right|<a$ достаточно для выполнения неравенства $f(x)>0$.

3. 3А. Рассматриваются комплексные числа z и $z_1=2-z$

а) Пусть $z=10$. Запишите в алгебраической форме все числа a такие, что $a^3=z_1$.

б) Изобразите на чертеже множество всех комплексных чисел z таких, что $(\bar z-z_1)(\bar z-z)=0$.

в) Пусть $|z|=1$. Изобразите на чертеже множество всех чисел z_1.

г)Пусть $|z|=1$. Найдите все числа z такие, что начало координат O и точки, соответствующие числам z, z_1 и $\bar z$, лежат на одной окружности.

4. 3Б. Дана функция $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}$.

а) Найдите промежутки монотонности функции $f(x)$.

б)Изобразите на чертеже множество всех точек с координатами $(x;\,y)$ такими, что $(y-f(x))(y-2)\leqslant 0$.

в)Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$ и прямой $y=2$.

г)Случайным образом выбираются числа x и y из отрезка $[-1;\,3]$. Выясните, при каких значениях параметра a вероятность того, что выбираются числа, удовлетворяющие условию $(y-f(x))(y-a)\leqslant 0$, равна 0,5.

5. Дана функция $f(x)=x^3+(a-1)x^2-(2a^2+a)x+2a^2,\ a\in\mathbb{R}$.

а) Пусть $a=1$. Решите уравнение $f(x)=0$.

б)Найдите все значения параметра a такие, что многочлен $y=f(x)$ делится без остатка на многочлен $P(x)=x^2-3x+2$.

в)Найдите все значения параметра a такие, что касательная к графику функции $f(x)$ в его точке с абсциссой $x_0=1$ параллельна прямой $y=1$.

г)Найдите все значения параметра a такие, что уравнение $\frac{f(x)}{x-2}=0$ имеет ровно два различных вещественных корня.