

**Выпускной экзамен по математике. Базовые классы, Санкт-Петербург, 1995 год, вариант 2**

Из предложенных сюжетов необходимо решить первые два, из оставшихся сюжетов следует выбрать один. Таким образом получится три сюжета: два обязательных и один выбранный. Всего 12 пунктов. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 пунктов из 12. Продолжительность экзамена 5 астрономических часов.

1. 1. Дана функция  $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ .

а) Вычислите  $f\left(\log_3 \frac{1}{54} + \log_3 2\right)$ .

б) Решите уравнение  $f(-3-x) - f(x) = -6$ .

в) Решите неравенство  $f(-3-x) - f(x) \geq -6$ .

г) Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} f(y) - f(x) = -6, \\ f(x+y) = 24. \end{cases}$$

2. 2. Дана функция  $f(x) = \sin x$ .

а) Вычислите значение  $\cos 2\alpha$ , если известно, что  $f(\alpha) = \frac{1}{4}$ .

б) Решите уравнение  $f(3x) - f(x) = \cos 2x$ .

в) Докажите, что  $f(3x) - f(x) - \cos 2x = (1 - 2\sin^2 x)(2\sin x - 1)$ .

г) Решите неравенство  $\frac{f(3x) - f(x) - \cos 2x}{\cos 2x} < 0$  на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

3. 3.А. Дана функция  $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{b-2x}$ .

а) Найдите все значения параметра  $b$  такие, что число  $x_0 = -2$  является корнем уравнения  $f(x) = -2$ .

б) Пусть  $b = 5$ . Решите уравнение  $f(x) = -2$ .

в) Пусть  $b = 5$ . Сравните числа  $|f(2)|$  и  $|f(0)|$ .

г) Найдите все значения параметра  $b$  такие, что областью определения функции  $y = f(x)$  является отрезок.

4. 3.Б. Дана функция  $f(x) = x^2 + 3x$ .

а) Найдите первообразную  $y = F(x)$  функции  $y = f(x)$ , график которой проходит через точку с координатами  $(-6; -18)$ .

б) Постройте график найденной первообразной.

в) Найдите уравнение касательной к графику найденной первообразной  $y = F(x)$  в его точке с абсциссой  $x_0 = 0$ .

г) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций  $y = -f(x)$ ,  $y = F(x)$  и отрезком  $[-3; 0]$  оси абсцисс.