

Выпускной экзамен по математике. Базовые классы, Санкт-Петербург, 1996 год, вариант 2

Из предложенных сюжетов необходимо решить первые два, из оставшихся сюжетов следует выбрать один. Таким образом получится три сюжета: два обязательных и один выбранный. Всего 12 пунктов. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 пунктов из 12. Продолжительность экзамена 5 астрономических часов.

1. 1. Дана функция $f(x) = \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x$.

а) Решите уравнение $f(x) = 1 + \cos 2x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

б) Пусть $g(x) = f\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - f\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$. Вычислите $g\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

в) Докажите, что $\frac{2f(x)}{g(x)} = \operatorname{tg} x + 1$.

г) Решите неравенство $\frac{2f(x)}{g(x)} \geq 0$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

2. 2. Дана функция $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 7x + 10)$.

а) Найдите область определения функции $y = f(x)$.

б) Вычислите $f(10) - f(7)$.

в) Решите уравнение $9^{1+f(x)} + 8 \cdot 3^{f(x)} - 1 = 0$.

г) Решите неравенство $9^{1+f(x)} + 8 \cdot 3^{f(x)} \geq 1$.

3. 3.А. Дана функция $f(x) = \sqrt{8+x} - \sqrt{2-x}$.

а) Найдите все координаты точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осями координат.

б) Сравните числа $|f(-1)|$ и $|f(-4)|$.

в) Решите уравнение $f(x) = \sqrt{-3-x}$.

г) Найдите область определения функции $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

4. 3.Б. Дана функция $f(x) = 3x^2 - x^3 - 3x$.

а) Напишите уравнение прямой m , касающейся графика функции $y = f(x)$ в его точке с абсциссой $x_0 = 1$.

б) Постройте график функции $y = f(x)$ и прямую m .

в) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямой m и осью Ox .

г) Найдите все значения параметра b такие, что уравнение $\frac{f(x)}{x} = b$ имеет ровно одно решение.