

Профильно-элитарный выпускной экзамен по математике. Санкт-Петербург, 1992 год, вариант 2

Из предложенных сюжетов необходимо решить первые два, из оставшихся сюжетов следует выбрать один. Таким образом получится три сюжета: два обязательных и один выбранный. Всего 12 пунктов. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 пунктов из 12. Продолжительность экзамена 5 астрономических часов.

1. Дана функция $f(x) = \log_2 x \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{27x} \log_4 \frac{x^2}{2^{16}}$.

а) Решите неравенство $f(x) \geq 0$.

б) Решите уравнение $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

в) При каких значениях a уравнение $f(x) = a$ имеет ровно два различных корня?

г) Пусть $n(b)$, где $b > 0$ и $b \neq 1$, — число различных корней уравнения $f(x) = f(bx)$. Постройте график функции n .

2. Даны функции $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos 2x$.

а) Вычислите площадь фигуры, которая ограничена графиками данных функций и прямыми $x = \pi$ и $x = \frac{7\pi}{6}$.

б) Пусть $A(m)$ и $B(m)$ — точки пересечения прямой $x = m$ с графиками функций f и g . При каких m длина отрезка с концами в этих точках равна единице?

в) Существует ли отрезок, концы которого лежат на графике функции f , а середина совпадает с точкой $M\left(\frac{13\pi}{12}, \frac{1}{4}\right)$?

г) Изобразите на координатной плоскости множество середин отрезков, концы которых лежат на графике функции f .

3. 3. Последовательность $\{x_n\}$ задана формулой $x_n = nx_{n-1} - 1$, а $x_0 = c$.

а) Докажите, что если $c \leq 1$, то данная последовательность монотонна.

б) Докажите, что если $c > 2$, то при всех натуральных n верно неравенство $|x_n/n!| \leq c$.

в) Докажите, что если последовательность $\{x_n\}$ сходящаяся, то она стремится к нулю.

г) Докажите, что если число c рационально, то эта последовательность не имеет конечного предела.

4. 4. Пусть $A(2z+1)$, $B(z+2)$, $C(z^2+2z)$ — точки плоскости (здесь z — комплексное число).

а) Докажите, что если $|z| = 1$, то $OA = OB$ (O — начало координат).

б) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику с вершинами в точках 0 , 1 и $-(z+1)$ комплексной плоскости.

в) Пусть $|z| = 1$. Найдите множество значений радиусов окружностей, описанных около треугольника ABC .

г) При каком значении z , где $|z| = 1$, площадь треугольника ABC принимает наибольшее значение?

5. 5. Назовем расстоянием между точками поверхности параллелепипеда длину кратчайшей ломаной на его поверхности, соединяющей эти точки. Пусть E и W — противоположные вершины параллелепипеда.

а) Найдите расстояние между вершинами E и W единичного куба.

б) При каких значениях a и b расстояние между вершинами E и W прямоугольного параллелепипеда единичного объема с длинами ребер a , a , b будет наименьшим?

в) Докажите, что расстояние между любыми парами точек поверхности единичного куба не превосходит расстояния между точками E и W .

г) Найдите длины ребер прямоугольного параллелепипеда единичного объема, расстояние между вершинами E и W которого принимает наименьшее значение.