

Профильно-элитарный выпускной экзамен по математике. Санкт-Петербург, 1991 год, вариант 2

1. Дана функция $f(x) = \log_3^3 x - 5 \log_3^2 x + 8 \log_3 x$.

а) Решите неравенство $f(x) < 0$.

б) Решите уравнение $f(x) = 4$.

в) Выясните, при каких значениях a неравенство $f(x) > a \log_3 x$ выполняется при всех x из множества $[27; +\infty)$.

г) Выясните, сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ в зависимости от a .

2. Дана функция $f(x) = \cos x \cos 3x$.

а) Решите уравнение $f(x) = -\frac{1}{2}$.

б) Найдите наименьшее положительное решение системы

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ \sin 5x = 1. \end{cases}$$

в) Найдите область значений функции f .

г) Пусть $g(t)$ — наибольшее значение f на отрезке $[t; t + \frac{\pi}{2}]$. Найдите наименьшее значение функции g на множестве вещественных чисел.

3. 3. Даны три комплексных числа: $z_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 3i)$, $z_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i)$, $z_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$.

а) Найдите расстояние от точки z_1 до фигуры, задаваемой уравнением $|z - z_3| = 1$.

б) Изобразите множество точек z комплексной плоскости, таких, что $|z_2 z - z_1 z_2| = |z_3 z - z_2 z_3|$.

в) Пусть z пробегает все точки отрезка с концами z_2, z_3 , а U и V — множества точек, которые пробегает при этом $u = z_2 z$ и $v = z_3 z$. Изобразите пересечение множеств U и V .

г) Пусть z пробегает все точки отрезка с концами z_1, z_3 . Изобразите множество всех точек, которое пробегает при этом $w = z^2$.

4. 4. Дана функция $f(x) = \sqrt{x}$. Точки пересечения прямой $x = m$ с графиком функции f и осью абсцисс обозначаются соответственно $A(m)$ и $B(m)$, касательная к графику в точке $A(m)$ обозначается $l(m)$.

а) Докажите, что площадь фигуры, ограниченной графиком функции f , осью абсцисс и прямой $x = m$, равна $\frac{2}{3}mf(m)$.

б) Пусть C — точка пересечения прямой $l(m)$ с осью абсцисс. Найдите отношение площадей криволинейного треугольника AOC и прямолинейного ABC .

в) Пусть M и N — точки графика функции f , такие, что прямая MN параллельна $l(4)$. Докажите, что площадь фигуры, ограниченной прямой MN , осью абсцисс и перпендикулярами к ней из точек M и N , не превосходит 32.

г) Пусть $y = g(x)$ — непрерывная неотрицательная функция, определенная на $[0; +\infty)$, такая, что $g(4) = 2$ и при любом $m \geq 0$ площадь фигуры, ограниченной графиком функции f , осями координат и прямой $x = m$, равна $\frac{2}{3}mg(m)$. Докажите, что $g(x) = \sqrt{x}$.

5. 5. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентно: $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n^2 - x_n - 3$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

а) Докажите, что если a — целое, то x_n — нечетное число при всех $n \geq 2$.

б) Выясните, при каком значении a последовательность $\{x_n\}$ является стационарной.

в) Выясните, при каких значениях a последовательность $\{x_n\}$ является геометрической прогрессией.

г) Пусть $a = 4$. Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ не имеет предела.