Профильно-элитарный выпускной экзамен по математике. Санкт-Петербург, 1994 год, вариант 1

Из предложенных сюжетов необходимо решить первые два, из оставшихся сюжетов следует выбрать один. Таким образом получится три сюжета: два обязательных и один выбранный. Всего 12 пунктов. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 пунктов из 12. Продолжительность экзамена 5 астрономических часов.

1. Дана функция $f(x)=\log_2 x+\log_{2x} x$.

а)Докажите, что числа x и $\dfrac{1}{4x}$ входят (либо не входят) в область определения функции f одновременно и $f\left(\dfrac{1}{4x}\right)=-f(x)$.

б) Решите уравнение $|f(x)|=f(2)$.

в)Докажите, что для любого натурального числа $n\geqslant 2$ уравнение $f(x)=f(x^n)$ имеет ровно одно решение на луче $[1;+\infty)$.

г) Найдите все такие a, при которых уравнение $f(x)=a\log_2^2 2x$ имеет три решения.

2. Дана функция $f(x)=\cos ax+\cos 2ax$.

а) Пусть $a=1$. Решите уравнение $f(x)=f(3x)$.

б) Найдите все такие a, при которых $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>0$.

в) Найдите все такие a, при которых $f(x)>0$ при всех $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

г) Найдите все такие a, при которых график функции f имеет центр симметрии.

3. 3. Дана функция $f(x)=ax-2\sqrt{x+1},\ a>0$.

а) Найдите все такие a, при которых функция f монотонна на луче $[0;+\infty)$.

б)Пусть $a=1$. Найдите уравнения касательных к графику данной функции, проходящих через точку $A(5,0)$.

в)Пусть $a=1$. Найдите все точки оси абсцисс, через которые проходит ровно одна касательная к графику функции f.

г)Найдите (при произвольном $a>0$) такое значение x_0, при котором фигура, ограниченная прямой, касающейся графика функции f в точке с абсциссой x_0, самим этим графиком и прямыми $x=-1,\ x=2$, имеет наименьшую площадь.

4. 4. Пусть a, b, c — длины некоторых отрезков.

а)Докажите, что если $a=\sqrt[6]{2},\ b=\sqrt[6]{3},\ c=\sqrt[6]{7}$, то треугольник, который можно составить из этих отрезков, остроугольный.

б) Выясните, существует ли треугольник со сторонами $a=19^{21},\ b=20^{21},\ c=21^{21}$.

в)Докажите, что если для любого натурального числа n существует треугольник со сторонами a^n, b^n, c^n, то все эти треугольники равнобедренные.

г)Пусть φ_n— угол треугольника со сторонами $a=1,\ b=\sqrt[n]{2},\ c=\sqrt[n]{4}$ ($n\geqslant 2$), лежащий против средней из них. Докажите, что последовательность $\{\varphi_n\}$ монотонна, и вычислите ее предел.

5. 5.Пусть $A(i-1),\ B(2i-1),\ C(2-3i)$— точки плоскости, соответствующие указанным комплексным числам, S — окружность $|z|=1$, а D — множество комплексных чисел, заданное неравенством $|2z-1|\leqslant 1$.

а) Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки $P\in S$ до точек A,B,C постоянна.

б) Изобразите на плоскости точки A,B и множество комплексных чисел вида $z(2i-1)+(1-z)(i-1)$, где $z\in D$.

в) Найдите такую точку $E\in D$ и все такие равносторонние треугольники с вершинами на S, для которых сумма квадратов расстояний от их вершин до E наибольшая.

г)Выясните, верно ли, что для всякой точки w, лежащей в треугольнике ABC, найдется такое число $z\in D$, что $w=zz_k+(1-z)z_j$, где $z_k,z_j\in\{i-1,2i-1,2-3i\}$.