

**Выпускной экзамен по математике. Математические классы, Санкт-Петербург, 1995 год,  
вариант 1**

Из предложенных сюжетов необходимо решить первые два, из оставшихся сюжетов следует выбрать один. Таким образом получится три сюжета: два обязательных и один выбранный. Всего 12 пунктов. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 пунктов из 12. Продолжительность экзамена 5 астрономических часов.

1. 1. Дана функция  $f(x) = \log_2(x+2) - \log_2(x-1)$ .

а) Решите неравенство  $f(x) > 1$ .

б) Решите уравнение  $f(x) = \log_4(4x^2)$ .

в) Выясните, какое из чисел ближе к единице —  $f(3)$  или  $f(5)$ .

г) Найдите множество значений функции  $f(x)$ .

2. 2. Дана функция  $f(x) = 2\sin^2 x - \sin 2x$

а) Вычислите  $f\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ .

б) Решите уравнение  $f(x) = 4\cos^2 x$ .

в) Найдите наименьшее значение функции  $f(x)$ .

г) Найдите все положительные числа  $a$  такие, что выполнения неравенства  $\left|x - \frac{3\pi}{8}\right| < a$  достаточно для

выполнения неравенства  $f(x) > 0$ .

3. 3А. Рассматриваются комплексные числа  $z$  и  $z_1 = 2 - z$

а) Пусть  $z = 10$ . Запишите в алгебраической форме все числа  $a$  такие, что  $a^3 = z_1$ .

б) Изобразите на чертеже множество всех комплексных чисел  $z$  таких, что  $(\bar{z} - z_1)(\bar{z} - z) = 0$ .

в) Пусть  $|z| = 1$ . Изобразите на чертеже множество всех чисел  $z_1$ .

г) Пусть  $|z| = 1$ . Найдите все числа  $z$  такие, что начало координат  $O$  и точки, соответствующие числам  $z$ ,  $z_1$  и  $\bar{z}$ , лежат на одной окружности.

4. 3Б. Дана функция  $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$ .

а) Найдите промежутки монотонности функции  $f(x)$ .

б) Изобразите на чертеже множество всех точек с координатами  $(x; y)$  такими, что  $(y - f(x))(y - 2) \leq 0$ .

в) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $f(x)$  и прямой  $y = 2$ .

г) Случайным образом выбираются числа  $x$  и  $y$  из отрезка  $[-1; 3]$ . Выясните, при каких значениях параметра  $a$  вероятность того, что выбираются числа, удовлетворяющие условию  $(y - f(x))(y - a) \leq 0$ , равна  $0,5$ .

5. Дана функция  $f(x) = x^3 + (a-1)x^2 - (2a^2 + a)x + 2a^2$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

а) Пусть  $a = 1$ . Решите уравнение  $f(x) = 0$ .

б) Найдите все значения параметра  $a$  такие, что многочлен  $y = f(x)$  делится без остатка на многочлен  $P(x) = x^2 - 3x + 2$ .

в) Найдите все значения параметра  $a$  такие, что касательная к графику функции  $f(x)$  в его точке с абсциссой  $x_0 = 1$  параллельна прямой  $y = 1$ .

г) Найдите все значения параметра  $a$  такие, что уравнение  $\frac{f(x)}{x-2} = 0$  имеет ровно два различных вещественных корня.