Выпускной экзамен по математике. Математические классы, РФ, 1994 год, работа 3, вариант 1

Для получения оценки «5» необходимо верно и полностью решить 5 заданий.
Продолжительность экзамена 5 астрономических часов.

1. Среди комплексных чисел $z \neq 0$ с аргументом $\frac{\pi}{4}$ найдите все такие, для которых $z^3 - 8z$ — действительное число.

2. Найдите все корни многочлена $x^3 + 2ax^2 - 5x - a - 9,$ если остатки от его деления на двучлены $x - 2$ и $x + 1$ равны.

3. При каких значениях параметра p число 2 является решением неравенства $\log_{\frac{x}{2+p^2}} \left(\frac{p^2}{2} + \frac{1}{2} - x^2 + \frac{6p}{x} \right) \geqslant -1?$

4. График функции $y = 2 - \sqrt{2x + 2}$ пересекают ось абсцисс в точке K, а касательная к графику пересекает ось абсцисс в точке C. Напишите уравнение этой касательной, если начало координат является серединой отрезка KC.

5. Докажите, что для всех отрицательных значений x $\ln \frac{2x - 3}{x - 7} + \frac{x}{11} \leqslant 0.$

6. Найдите наибольшее значение площади фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2 + \cos x,$ $y = \sin \frac{x}{2}$ и линиями $x = a$ и $x = a + \pi.$