

Профильно-элитарный выпускной экзамен по математике. Санкт-Петербург, 1994 год, вариант 1

Из предложенных сюжетов необходимо решить первые два, из оставшихся сюжетов следует выбрать один. Таким образом получится три сюжета: два обязательных и один выбранный. Всего 12 пунктов. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 пунктов из 12. Продолжительность экзамена 5 астрономических часов.

1. Дана функция $f(x) = \log_2 x + \log_{2x} x$.

а) Докажите, что числа x и $\frac{1}{4x}$ входят (либо не входят) в область определения функции f одновременно и $f\left(\frac{1}{4x}\right) = -f(x)$.

б) Решите уравнение $|f(x)| = f(2)$.

в) Докажите, что для любого натурального числа $n \geq 2$ уравнение $f(x) = f(x^n)$ имеет ровно одно решение на луче $[1; +\infty)$.

г) Найдите все такие a , при которых уравнение $f(x) = a \log_2^2 2x$ имеет три решения.

2. Дана функция $f(x) = \cos ax + \cos 2ax$.

а) Пусть $a = 1$. Решите уравнение $f(x) = f(3x)$.

б) Найдите все такие a , при которых $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$.

в) Найдите все такие a , при которых $f(x) > 0$ при всех $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

г) Найдите все такие a , при которых график функции f имеет центр симметрии.

3. Дана функция $f(x) = ax - 2\sqrt{x+1}$, $a > 0$.

а) Найдите все такие a , при которых функция f монотонна на луче $[0; +\infty)$.

б) Пусть $a = 1$. Найдите уравнения касательных к графику данной функции, проходящих через точку $A(5, 0)$.

в) Пусть $a = 1$. Найдите все точки оси абсцисс, через которые проходит ровно одна касательная к графику функции f .

г) Найдите (при произвольном $a > 0$) такое значение x_0 , при котором фигура, ограниченная прямой, касающейся графика функции f в точке с абсциссой x_0 , самим этим графиком и прямыми $x = -1$, $x = 2$, имеет наименьшую площадь.

4. Пусть a, b, c — длины некоторых отрезков.

а) Докажите, что если $a = \sqrt[3]{2}$, $b = \sqrt[3]{3}$, $c = \sqrt[3]{7}$, то треугольник, который можно составить из этих отрезков, остроугольный.

б) Выясните, существует ли треугольник со сторонами $a = 19^{21}$, $b = 20^{21}$, $c = 21^{21}$.

в) Докажите, что если для любого натурального числа n существует треугольник со сторонами a^n , b^n , c^n , то все эти треугольники равнобедренные.

г) Пусть φ_n — угол треугольника со сторонами $a = 1$, $b = \sqrt[3]{2}$, $c = \sqrt[3]{4}$ ($n \geq 2$), лежащий против средней из них. Докажите, что последовательность $\{\varphi_n\}$ монотонна, и вычислите ее предел.

5. Пусть $A(i-1)$, $B(2i-1)$, $C(2-3i)$ — точки плоскости, соответствующие указанным комплексным числам, S — окружность $|z| = 1$, а D — множество комплексных чисел, заданное неравенством $|2z-1| \leq 1$.

а) Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки $P \in S$ до точек A, B, C постоянна.

б) Изобразите на плоскости точки A, B и множество комплексных чисел вида $z(2i-1) + (1-z)(i-1)$, где $z \in D$.

в) Найдите такую точку $E \in D$ и все такие равнобедренные треугольники с вершинами на S , для которых сумма квадратов расстояний от их вершин до E наибольшая.

г) Выясните, верно ли, что для всякой точки w , лежащей в треугольнике ABC , найдется такое число $z \in D$, что $w = zz_k + (1-z)z_j$, где $z_k, z_j \in \{i-1, 2i-1, 2-3i\}$.