Профильно-элитарный выпускной экзамен по математике. Санкт-Петербург, 2002 год, вариант 2

Из предложенных сюжетов необходимо решить первые два, из оставшихся сюжетов следует выбрать один. Таким образом получится три сюжета: два обязательных и один выбранный. Всего 12 пунктов. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 пунктов из 12. Продолжительность экзамена 5 астрономических часов.

1. Даны функции $f(x)=\log_x(x+1)$ и $g(x)=\dfrac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)}-1.$

а) Решите неравенство $f(x)+g(x)>0$.

б) Найдите все значения x такие, что $f(x)$ и $g(x)$ одновременно являются целыми числами.

в) Найдите все положительные числа d такие, что уравнение $f(x)-g(x)=d$ не имеет решения.

г) Пусть x_n — такое число, что $f(x_n)=-\dfrac{1}{n}$, где n — натуральное число, $n\geqslant 2$. Докажите, что $x_n<\dfrac{2\ln n}{n}$.

2. Дана функция $f(x)=\dfrac{1}{a\cos x+1}$.

а) Найдите все значения a такие, что функция f принимает только отрицательные значения на интервале $\left(\dfrac{2\pi}{3};\pi\right)$.

б) Пусть $a=2$. Решите уравнение $f(x)-f(2x)=2$.

в) Пусть $a<-4$. Точки пересечения графика функции f с графиком функции $g(x)=a\cos x+1$ последовательно соединяются отрезками. Укажите наименьшую и наибольшую из длин полученных отрезков.

г) Пусть $a=2$ и x таково, что $\sin 3x\neq 0$. Найдите

$$\lim_{n\to\infty}\left(3^n\cdot f(2x)\cdot f\left(\frac{2x}{3}\right)\cdot f\left(\frac{2x}{9}\right)\cdot\ldots\cdot f\left(\frac{2x}{3^n}\right)\right).$$

3. Обозначим через P_n множество всех наборов $(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n)$ целых чисел таких, что $0\leqslant t_i\leqslant i$. Сопоставим каждому такому набору число $N(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n)=t_1\cdot 1!+t_2\cdot 2!+\ldots+t_n\cdot n!$.

а) Найдите все возможные наборы $(t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4)$, для которых $N(t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4)=15$.

б) Докажите, что $N(t_1,t_2,\ldots,t_n)\leqslant(n+1)!-1$.

в) Докажите, что N определяет взаимно однозначное соответствие между P_n и множеством всех неотрицательных целых чисел, меньших $(n+1)!$.

г) Пусть $j_0, j_1, \ldots, j_n$ — некоторая перестановка чисел 0, 1, ..., n. Обозначим через t_i количество чисел, меньших i, но стоящих справа от него в данной перестановке. Найдите все перестановки $j_0, j_1, \ldots, j_6$, для которых $N(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_6)=2002$.

4. Дан многочлен $p(z)=z^3+z^2$, z — комплексное число.

а) Решите уравнение $p(z)=2$.

б) Найдите сумму квадратов всех корней уравнения $p(z)=2002$.

в) Найдите все действительные значения c, при которых модули всех корней уравнения $p(z)=c$ не превосходят 1.

г) Существуют ли такие комплексные значения c, при которых модули всех корней уравнения $p(z)=c$ равны 1?

5. Будем говорить, что прямоугольник (трапеция) вписан в подграфик функции f, если одна из его (её) сторон лежит на оси абсцисс, а две вершины — на подграфике этой функции.

а)Найдите наибольшее значение площади прямоугольника, вписанного в подграфик функции $f(x)=(2-|x|^3)^{\frac{1}{3}}$.

б)Верно ли, что из всех прямоугольников, вписанных в подграфик функции $f(x)=\cos x$ $\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)$ наибольшую площадь имеет тот, высота которого вдвое меньше его ширины?

в) Пусть S — наибольшая площадь прямоугольника, вписанного в подграфик функции $f(x)=\cos x$ $\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)$. Докажите, что площадь вписанной в подграфик этой функции трапеции, основания которой параллельны оси ординат, меньше S.

г)Найдите все значения c, для которых наибольшая площадь прямоугольника, вписанного в подграфик функции $f(x)=\cos x+c$ $\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)$, равна πc.