

## Выпускной экзамен по математике. Математические классы, Санкт-Петербург, 1996 год, вариант 2

Из предложенных сюжетов необходимо решить первые два, из оставшихся сюжетов следует выбрать один. Таким образом получится три сюжета: два обязательных и один выбранный. Всего 12 пунктов. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 пунктов из 12.

Продолжительность экзамена 5 астрономических часов.

1. 1. Дана функция  $f(x) = \frac{\cos 2x}{\cos x}$ .

а) Решите уравнение  $f(x) = -1$ .

б) Решите неравенство  $f(x) \geq 0$  на отрезке  $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}\right]$ .

в) Сравните числа  $f\left(\frac{2\pi}{7}\right)$  и  $-1$ .

г) Найдите множество значений функции  $f(x)$ .

2. 2. Дана функция  $f(x) = \log_3 \frac{x}{3} \cdot \log_3 x$ .

а) Решите неравенства  $f(x) > 6$ .

б) Решите уравнение  $|f(x)| = f\left(\frac{x}{3}\right)$ .

в) Найдите промежутки монотонности функции  $f(x)$ .

г) Выясните, сколько корней имеет уравнение  $f(x) = f(x \cdot a^{-1})$  в зависимости от  $a$  (при  $a > 0$ ).

3. 3А. Рассматриваются комплексные числа  $z$  и  $u = z - \frac{3}{z}$ .

а) Запишите в алгебраической форме все числа  $z$  такие, что  $u = -4i$ .

б) Изобразите на чертеже совокупность всех чисел  $z$  таких, что  $\arg z = \frac{3\pi}{2}$  и  $|u| \leq 4$ .

в) Пусть  $|z| \geq 1$ . Найдите наибольшее значение расстояния между точками комплексной плоскости, соответствующими  $z$  и  $u$ .

г) Пусть  $|z| = 1$ . Найдите наибольшее значение площади треугольника с вершинами в точках, соответствующих  $-\frac{3}{z}$  и  $u$ , и начале координат  $O$ .

4. 3Б. Дана функция  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ .

а) Напишите уравнения касательных к графику функции  $f(x)$ , параллельных оси абсцисс.

б) Постройте график функции  $f(x)$  на отрезке  $[-3; 3]$ .

в) Докажите, что  $\int_{-0,5}^1 f(x) dx < \frac{15}{4}$ .

г) Найдите наименьшее значение площади фигуры, ограниченной графиком функции  $f(x)$  и прямыми  $y = 0$ ,  $x = a$ ,  $x = a + 1,5$ , для  $a > -1$ .

5. 3В. Дана функция  $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$ .

а) Решите уравнение  $(3 - f(x))(f(x) + 0,75x) = 0$ .

б) Изобразите на чертеже множество всех точек с координатами  $(x; y)$  такими, что  $-0,75x \leq y \leq f(x)$ .

в) Наудачу выбирается целое число  $a$  из отрезка  $[-12; 12]$ . Определите вероятность того, что уравнение  $f(x) = a$  имеет целое решение.

г) Найдите все значения параметра  $a$  такие, что уравнение  $f(x) = ax$  не имеет решений на отрезке  $[-4; 0]$ .