

Выпускной экзамен по математике. Базовые классы, Санкт-Петербург, 2001 год, вариант 1

Из предложенных сюжетов необходимо решить первые два, из оставшихся сюжетов следует выбрать один. Таким образом получится три сюжета: два обязательных и один выбранный. Всего 12 пунктов. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 пунктов из 12. Продолжительность экзамена 5 астрономических часов.

1. 1. Дана функция $f(x) = \log_2(x-3) + \log_2(x-7)$.

а) Найдите все значения a такие, что $x = 11$ является корнем уравнения $f(x) = a$.

б) Решите уравнение $f(x) = 5$.

в) Решите неравенство $f(x) < 5$.

г) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} f(x) = y, \\ 4^y - 31 \cdot 2^y = 32. \end{cases}$$

2. 2. Дана функция $f(x) = \sqrt{21 + 4x - x^2}$.

а) Найдите область определения данной функции.

б) Решите уравнение $f(x) = 1 - 3x$.

в) Сравните числа $f(3) + f(5)$ и $2f(4)$.

г) Найдите все числа x такие, что выполняется равенство $f(x-1) = f(5-x)$.

3. 3. Дана функция $f(x) = \sin 3x - \sin x$.

а) Докажите, что $\frac{f(x)}{f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = -\operatorname{tg} x$.

б) Вычислите $f(\alpha)$, если $\sin \alpha = \frac{1}{4}$.

в) Решите уравнение $f(x) = \sin 2x$.

г) Решите неравенство $\frac{f(x)}{\sin x} \geq -1$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

4. 4. Дана функция $f(x) = x - \frac{x^3}{3}$.

а) Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осями координат.

б) Исследуйте функцию $y = f(x)$ на монотонность.

в) Постройте график функции $y = f(x)$.

г) Образующая конуса равна $\sqrt{3}$. Найдите наибольший возможный объем такого конуса.