

Выпускной экзамен по математике. Математические классы, Санкт-Петербург, 1995 год, вариант 1

Из предложенных сюжетов необходимо решить первые два, из оставшихся сюжетов следует выбрать один. Таким образом получится три сюжета: два обязательных и один выбранный. Всего 12 пунктов. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 пунктов из 12.
Продолжительность экзамена 5 астрономических часов.

1. 1. Дана функция $f(x) = \log_2(x+2) - \log_2(x-1)$.

- а) Решите неравенство $f(x) > 1$.
- б) Решите уравнение $f(x) = \log_4(4x^2)$.
- в) Выясните, какое из чисел ближе к единице — $f(3)$ или $f(5)$.
- г) Найдите множество значений функции $f(x)$.

2. 2. Дана функция $f(x) = 2\sin^2x - \sin 2x$

а) Вычислите $f\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

- б) Решите уравнение $f(x) = 4\cos^2x$.
- в) Найдите наименьшее значение функции $f(x)$.

г) Найдите все положительные числа a такие, что выполнения неравенства $\left|x - \frac{3\pi}{8}\right| < a$ достаточно для выполнения неравенства $f(x) > 0$.

3. 3А. Рассматриваются комплексные числа z и $z_1 = 2 - z$

- а) Пусть $z = 10$. Запишите в алгебраической форме все числа a такие, что $a^3 = z_1$.
- б) Изобразите на чертеже множество всех комплексных чисел z таких, что $(\bar{z} - z_1)(\bar{z} - z) = 0$.
- в) Пусть $|z| = 1$. Изобразите на чертеже множество всех чисел z_1 .
- г) Пусть $|z| = 1$. Найдите все числа z такие, что начало координат O и точки, соответствующие числам z , z_1 и \bar{z} , лежат на одной окружности.

4. 3Б. Дана функция $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$.

- а) Найдите промежутки монотонности функции $f(x)$.
- б) Изобразите на чертеже множество всех точек с координатами $(x; y)$ такими, что $(y - f(x))(y - 2) \leq 0$.
- в) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$ и прямой $y = 2$.
- г) Случайным образом выбираются числа x и y из отрезка $[-1; 3]$. Выясните, при каких значениях параметра a вероятность того, что выбираются числа, удовлетворяющие условию $(y - f(x))(y - a) \leq 0$, равна 0,5.

5. Дана функция $f(x) = x^3 + (a-1)x^2 - (2a^2+a)x + 2a^2$, $a \in \mathbb{R}$.

- а) Пусть $a = 1$. Решите уравнение $f(x) = 0$.
- б) Найдите все значения параметра a такие, что многочлен $y = f(x)$ делится без остатка на многочлен $P(x) = x^2 - 3x + 2$.
- в) Найдите все значения параметра a такие, что касательная к графику функции $f(x)$ в его точке с абсциссой $x_0 = 1$ параллельна прямой $y = 1$.
- г) Найдите все значения параметра a такие, что уравнение $\frac{f(x)}{x-2} = 0$ имеет ровно два различных вещественных корня.