

Профильно-элитарный выпускной экзамен по математике. Санкт-Петербург, 2002 год, вариант 2

Из предложенных сюжетов необходимо решить первые два, из оставшихся сюжетов следует выбрать один. Таким образом получится три сюжета: два обязательных и один выбранный. Всего 12 пунктов. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 пунктов из 12. Продолжительность экзамена 5 астрономических часов.

1. Даны функции $f(x) = \log_x(x+1)$ и $g(x) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)} - 1$.

а) Решите неравенство $f(x) + g(x) > 0$.

б) Найдите все значения x такие, что $f(x)$ и $g(x)$ одновременно являются целыми числами.

в) Найдите все положительные числа d такие, что уравнение $f(x) - g(x) = d$ не имеет решения.

г) Пусть x_n — такое число, что $f(x_n) = -\frac{1}{n}$, где n — натуральное число, $n \geq 2$. Докажите, что $x_n < \frac{2 \ln n}{n}$.

2. Дана функция $f(x) = \frac{1}{a \cos x + 1}$.

а) Найдите все значения a такие, что функция f принимает только отрицательные значения на интервале $\left(\frac{2\pi}{3}; \pi\right)$.

б) Пусть $a = 2$. Решите уравнение $f(x) - f(2x) = 2$.

в) Пусть $a < -4$. Точки пересечения графика функции f с графиком функции $g(x) = a \cos x + 1$ последовательно соединяются отрезками. Укажите наименьшую и наибольшую из длин полученных отрезков.

г) Пусть $a = 2$ и x таково, что $\sin 3x \neq 0$. Найдите

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3^n \cdot f(2x) \cdot f\left(\frac{2x}{3}\right) \cdot f\left(\frac{2x}{9}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{2x}{3^n}\right) \right).$$

3. Обозначим через P_n множество всех наборов (t_1, t_2, \dots, t_n) целых чисел таких, что $0 \leq t_i \leq i$. Сопоставим каждому такому набору число $N(t_1, t_2, \dots, t_n) = t_1 \cdot 1! + t_2 \cdot 2! + \dots + t_n \cdot n!$.

а) Найдите все возможные наборы (t_1, t_2, t_3, t_4) , для которых $N(t_1, t_2, t_3, t_4) = 15$.

б) Докажите, что $N(t_1, t_2, \dots, t_n) \leq (n+1)! - 1$.

в) Докажите, что N определяет взаимно однозначное соответствие между P_n и множеством всех неотрицательных целых чисел, меньших $(n+1)!$.

г) Пусть j_0, j_1, \dots, j_n — некоторая перестановка чисел $0, 1, \dots, n$. Обозначим через t_i количество чисел, меньших i , но стоящих справа от него в данной перестановке. Найдите все перестановки j_0, j_1, \dots, j_n , для которых $N(t_1, t_2, \dots, t_n) = 2002$.

4. Дан многочлен $p(z) = z^3 + z^2$, z — комплексное число.

а) Решите уравнение $p(z) = 2$.

б) Найдите сумму квадратов всех корней уравнения $p(z) = 2002$.

в) Найдите все действительные значения c , при которых модули всех корней уравнения $p(z) = c$ не превосходят 1.

г) Существуют ли такие комплексные значения c , при которых модули всех корней уравнения $p(z) = c$ равны 1?

5. Будем говорить, что прямоугольник (трапеция) вписан в подграфик функции f , если одна из его (её) сторон лежит на оси абсцисс, а две вершины — на подграфике этой функции.

а) Найдите наибольшее значение площади прямоугольника, вписанного в подграфик функции $f(x) = (2 - |x|^3)^{\frac{1}{3}}$.

б) Верно ли, что из всех прямоугольников, вписанных в подграфик функции $f(x) = \cos x$ ($x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$) наибольшую площадь имеет тот, высота которого вдвое меньше его ширины?

в) Пусть S — наибольшая площадь прямоугольника, вписанного в подграфик функции $f(x) = \cos x$ ($x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$). Докажите, что площадь вписанной в подграфик этой функции трапеции, основания которой параллельны оси ординат, меньше S .

г) Найдите все значения c , для которых наибольшая площадь прямоугольника, вписанного в подграфик функции $f(x) = \cos x + c$ ($x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$), равна πc .