

Выпускной экзамен по математике. Математические классы, Санкт-Петербург, 1992 год, вариант 1

Из предложенных сюжетов необходимо решить первые два, из оставшихся сюжетов следует выбрать один. Таким образом получится три сюжета: два обязательных и один выбранный. Всего 12 пунктов. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 пунктов из 12. Продолжительность экзамена 5 астрономических часов.

1. 1. Дана функция $f(x) = \frac{\sqrt{3} + 2 \cos x}{2 \cos x - \sqrt{3}}$.

а) Решите уравнение: $f(x) = -1$.

б) Найдите все решения неравенства $f(x) \geq 0$ из отрезка $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

в) Докажите, что $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{12} + \frac{x}{2}\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{2}\right)$.

г) Найдите множество значений функции f на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

2. 2. Дана функция: $f(x) = \log_2(4 - x^2)$.

а) Решите неравенство: $f(x) \leq 0$.

б) Решите уравнение: $f(x) = 2 \log_2(7 - 4x)$.

в) Найдите промежутки монотонности функции f .

г) Выясните, сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ (в зависимости от a).

3. 3А. Дана функция $f(x) = x - \sqrt{x+2}$.

а) Напишите уравнение касательной l к графику функции f в точке с абсциссой 7.

б) Найдите наименьшее и наибольшее значение функции f на отрезке $[-2; 2]$.

в) Постройте график функции f на отрезке $[-2; 8]$.

г) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции f , касательной l и осью абсцисс.

4. 3Б. Даны комплексные числа $z_0 = i$ и $z_1 = \sqrt{3}$.

а) Изобразите на чертеже множество M всех таких комплексных чисел z , что $|z - z_0| = 1$.

б) Изобразите на чертеже множество K всех таких комплексных чисел z , что $|z - z_0| = |z - z_1|$.

в) Найдите все числа, содержащиеся и в K , и в M .

г) Среди чисел, принадлежащих множеству K , найдите число с наименьшим модулем.

5. 3В. Дана функция $f(x) = x^3 - (a+1)x^2 + (a^2-3)x + 2$.

а) Решите уравнение $f(x) = 0$ при $a = 2$.

б) Решите относительно a неравенство $f(a) \geq 0$.

в) Решите уравнение $f(x) = 0$ при условии, что один из его корней равен 2.

г) Выясните, при каких значениях a уравнение $f(x) = b$ имеет единственный корень при любом b .