

Выпускной экзамен по математике. Базовые классы, Санкт-Петербург, 2000 год, вариант 1

Из предложенных сюжетов необходимо решить первые два, из оставшихся сюжетов следует выбрать один. Таким образом получится три сюжета: два обязательных и один выбранный. Всего 12 пунктов. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 пунктов из 12.

Продолжительность экзамена 5 астрономических часов.

1. 1. Дана функция $f(x) = 5^{x+1}$.

а) Вычислите $f\left(\log_5 \frac{1}{2}\right)$.

б) Найдите все значения x , при которых график функции $y = f(x)$ расположен ниже прямой $y = \frac{5}{2}$.

в) Решите уравнение $3f(x) = 2f^2(x) - 5$.

г) Найдите все числа a такие, что $f(\log_5 a) < \frac{5}{2}$.

2. 2. Дана функция $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 12}$.

а) Найдите область определения функции $y = f(x)$.

б) Сравните числа $f(0) - f(1)$ и $f(7)$.

в) Решите уравнение $f(x) = 2x - 4$.

г) Решите неравенство $(x-7)f(x) \geq 0$.

3. 3. Дана функция $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$.

а) Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, параллельной оси абсцисс.

б) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[-5; -1]$.

в) Постройте график функции $y = f(x)$ на отрезке $[-5; -1]$.

г) Определите число a так, чтобы функция $F(x) = \ln x + \frac{a}{x}$ являлась первообразной функции $y = f(x)$ на луче $(0; +\infty)$.

4. 4. Дана функция $f(x) = \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x$.

а) Докажите тождество $\frac{2f(x)}{1 + \cos 2x} = \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 2$.

б) Решите уравнение $f(x) = 0$.

в) Пусть $g(x) = f(x) - f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Вычислите $g\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

г) Найдите все решения неравенства $g(x) > -\frac{1}{2}$ из отрезка $[0; \pi]$.