

— $1 \leq x \leq 1$. Среди этих трапеций выбрана та, которая имеет наибольшую площадь. Найдите эту площадь. [49/27.]

9°. Криволинейная трапеция ограничена кривой $y = x^2 + 1$, где $x \in [1; 2]$, и отрезками прямых $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$. В какой точке данной кривой следует провести касательную, чтобы она отсекала от криволинейной трапеции обычную трапецию наибольшей площади? [В точке с координатами (1,5; 3,25).]

10°. Фигура ограничена линиями: $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$. В какой точке графика функции $y = e^{-x}$ надо провести касательную, чтобы она отсекала от фигуры обычную трапецию наибольшей площади S . Найдите эту площадь. [В точке с абсциссой $x_0 = 0,5$; $S = 1/\sqrt{e}$.]

11°. Найдите все значения параметра a ($a \geq 1$), при каждом из которых площадь S фигуры, лежащей в полуплоскости $x \geq 0$ и ограниченной прямыми $y = 1$, $y = 2$ и кривыми $y = ax^2$ и $y = 0,5ax^2$, будет наибольшей. Найдите эту площадь. [$a = 1$, $S = 3\frac{1}{3} - 2\sqrt{2}$.]

12°. Найдите все значения параметра a ($a \geq 2$), при каждом из которых площадь S фигуры, лежащей в полуплоскости $x \geq 0$ и ограниченной прямыми $y = 1$, $y = 2$ и кривыми $y = \sqrt{ax}$, $y = 0,5\sqrt{ax}$, будет наибольшей. Найдите эту площадь. [$a = 2$; $S = 3,5$.]

13°. Касательная к графику функции $y = \sqrt[3]{x^2}$ такова, что абсцисса x_0 точки касания принадлежит отрезку $[0,5; 1]$. При каком значении x_0 площадь S треугольника, ограниченного этой касательной, осью Ox и прямой $x = 2$, будет наименьшей? Чему равна эта наименьшая площадь? [$x_0 = 0,8$, $S = 0,96\sqrt[3]{10}$.]

Письмо в редакцию

Уважаемая редакция! Вам, очевидно, известно, что тексты экзаменационных работ, предложенные Программно-методическим управлением Министерства просвещения РСФСР выпускникам московских классов с углубленным изучением математики в июне 1988 г., вызвали существенные нарекания со стороны учителей, работающих в этих классах¹. Хочу высказать свое мнение по данному вопросу.

В задании № 1 обоих вариантов надо было решить трехчленное уравнение с комплексными коэффициентами. Задание, вообще говоря, несложное, однако для учащихся совершенно неожиданное. Дело в том, что в стабильном учебном пособии для десятых классов с углубленным изучением математики Н. Я. Виленкина, О. С. Ивашева-Мусатова, С. И. Шварцбурда

¹Оба варианта этой работы приводятся в предыдущей статье Л. И. Звавича и В. К. Смирновой. — *Прим. ред.*

«Алгебра и математический анализ» (1984) в теме «Комплексные числа» трехчленные уравнения с комплексными коэффициентами не рассматриваются. О них только упоминается. На с. 186 этого пособия подробно рассмотрено решение трехчленного уравнения с действительными коэффициентами; об уравнениях с действительными коэффициентами идет речь и в упражнении № 267 (1, 2).

Многие учителя пользуются в своей работе пособием для учителя М. Л. Галицкого, М. М. Мошкова, С. И. Шварцбурда «Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа» (1986). Это пособие было рекомендовано Минпросом СССР. Набор упражнений в нем хорошо дополняет систему упражнений стабильного учебного пособия, даны тексты самостоятельных и контрольных работ, однако и в них по теме «Комплексные числа» нет ни одного упражнения подобного экзаменационному заданию № 1. В такой ситуации вполне вероятно, что выпускники впервые столкнулись с этой (пусть и нетрудной) задачей в условиях экзамена.

Легко предвидеть упреки в адрес учителей, чьи выпускники написали работу хуже, чем позволяли ожидать их годовые оценки. Учителей теперь можно обвинить в отсутствии творческого подхода у них самих и у их воспитанников. Такие упреки, думается, были бы неуместны, поскольку каждый учитель больше внимания уделяет тому, чем увлечен сам, но научные пристрастия у учителей разные. Главное назначение учебных пособий в том и состоит, чтобы направлять работу учителя некими ориентирами.

Задание № 2 (с учетом всех тонкостей, возникающих в ходе его решения) считаю излишне сложным для экзаменационной работы. Мне также кажется, что предлагать такое задание под вторым номером — это значит обречь многих выпускников на длительный мучительный поиск решения и потерю драгоценного времени, ведь многие учащиеся приступают к заданиям именно в том порядке, как они пронумерованы. Не стоит забывать и о том, что на выпускников давит колоссальный психологический груз ответственности: под угрозой оценка в аттестате.

Теперь о содержательной стороне вопроса. Во II варианте задание № 2 существенно проще по сравнению с I вариантом и допускает изящное решение путем замены $(\pi/3) - x = t$. Используя формулы приведения и косинуса тройного аргумента, получаем, что $y = -4\cos^2 t + 3$ (при условии, что $\cos t \neq 0$), откуда $E(y) = [-1; 3]$.

В I варианте процесс упрощения формулы, задающей функцию, представляется значительно более трудоемким².

И наконец, главная тонкость задания № 2: отыскание области значений функции. Думается, что абсолютное большин-

²Один из вариантов упрощения указан в предыдущей статье. — Прим. ред.

ство школьников из тех, разумеется, кто сумел привести заданную функцию к подходящему виду, допустили оплошность в заключительной части решения. Проиллюстрируем ее на примере I варианта. Для отыскания области значений функции учащиеся исключали из области значений выражения $\cos((\pi/6)+x)$ те значения, которые оно принимает в точках, не входящих в область определения исходной функции. В I варианте точки вида πk ; $(-\pi/3)+\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, не принадлежат области определения функции. Значит, $E(y)=[-1; 1] \setminus \{-\sqrt{3}/2; \sqrt{3}/2\}$.

Однако такое решение, приводящее в данном случае к правильному ответу, нельзя считать полным. Более того, легко показать, что, рассуждая подобным образом, можно получить неверный ответ.

Действительно, найдем тем же способом область значений функции $y = \frac{\sin 2x - 2 \cos x}{1 - \sin x}$. Область ее определения — все

действительные числа, кроме чисел вида $(\pi/2)+2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. После преобразований получим $y = -2 \cos x$. Поскольку $-2 \cos x \in [-2; 2]$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и при $x = (\pi/2)+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $-2 \cos x = 0$, заключаем, что $E(y) = [-2; 2] \setminus \{0\}$. Но в данном случае это неверно, так как $y((-\pi/2)+2\pi k) = 0$, т. е. $0 \in E(y)$.

Где же произошла ошибка? Дело в том, что необходимо было проверить (как в экзаменационном примере, так и в предложенном здесь контрпримере), что значение, исключаемое из области значений функции, не достигается в каких-либо других точках области определения функции³. Неудивительно, что подавляющее большинство учащихся не продумали до конца указанную здесь деталь.

Отметим также и то, что в учебных пособиях для IX—X классов нет ни одного упражнения, подобного тому, которое было предложено в задании № 2. Легко представить себе состояние учащегося, который уже во втором задании вынужден изобретать новые для себя методы решения. Я хочу поставить вопрос: является ли выпускной экзамен местом для подобных мук творчества?

Задание № 3 требует использования теоремы о делении с остатком многочлена на многочлен. Задача вполне может быть отнесена к разряду интересных, но, по моему мнению, она носит достаточно выраженный олимпиадный характер. В ней проверяется узкая, специальная тема, которая не находит широкого применения в курсе алгебры и анализа IX—X классов. Необходимо учесть и то, что на изучение делимости многочле-

³Упражнения, на которых можно отработать этот момент, даны в статье Л. И. Завича и В. К. Смирновой после разобранного решения задания № 2 экзаменационной работы за 1988 г. — *Прим. ред.*

нов в IX классе отводится 2—3 ч в первой половине октября. Думается, что цель этих уроков состоит в ознакомлении учащихся с теоремой о делении многочленов с остатком, а не в отработке навыков решения задач, подобных той, что была предложена на экзамене.

Таким образом и задание № 3 ставит перед выпускниками проблему, связанную с придумыванием метода решения задачи в незнакомой ситуации.

Задание № 4, на первый взгляд, требовало использовать уравнение касательной, т. е. проверяло одну из тем IX класса «Производная и ее приложения». Однако этот путь, естественный, казалось бы, для экзамена по алгебре и анализу, приводил к излишне громоздкому решению. Поскольку график предложенной функции представляет собой полуокружность, задача допускает элементарное геометрическое решение на уровне использования теоремы Пифагора и подобия треугольников. Приведем решение задания № 4 из I варианта. (В решении используется рис. 1 из предыдущей статьи.— Прим. ред.)

Из условия следует, что $OM=2\sqrt{2}$, $OP=3$, $AP=1$. По теореме Пифагора из треугольников APO и AMO находим $AM=\sqrt{2}$. Положим $AF=x$, $FP=y$. Поскольку $\triangle FMO \sim \triangle FPA$ получим:

$$\frac{2\sqrt{2}}{1} = \frac{y+3}{x} = \frac{x+\sqrt{2}}{y}, \text{ откуда } \begin{cases} 2\sqrt{2}x=y+3, \\ 2\sqrt{2}y=x+\sqrt{2}. \end{cases} \text{ Из системы урав-$$

нений находим, что $x=\sqrt{2}$, и заключаем: $\sin \alpha = AP/AF = 1/\sqrt{2}$, т. е. $\alpha=45^\circ$.

Задание № 5 легко решается с помощью известных формул курса физики VIII класса, что и было сделано многими учащимися. Предлагать такое задание для проверки знаний по теме «Интеграл» по меньшей мере нецелесообразно. Кроме того, опять большие неприятности подстерегали учащихся, решавших I вариант. Дело в том, что составители предложили такую формулировку задачи, при которой она вообще не имеет однозначного решения. Из условия не следует, что поезд прошел уклон за первые 20 с после начала движения, поэтому

нельзя считать, что длина уклона равна $\int_0^{20} v(t)dt$. Фактически

она равна $\int_{t_0}^{t_0+20} v(t)dt$, где t_0 из условия определить нельзя!

Отметим, что в задании № 5 из II варианта составители указали одно лишнее данное: тот факт, что автомобиль остановился именно через 15 с после начала торможения, легко получить из условия $v(t)=0$.

Какие же выводы следуют из всего сказанного?

В экзамене по алгебре и математическому анализу из пяти заданий фактически лишь одно (задание № 1) проверяло материал, изучаемый в X классе, что видно из приведенного списка: задание № 1 — X класс, № 2 — IX класс, № 3 — IX класс, № 4 — VIII—IX классы, № 5 — VIII класс (курс физики). Таким образом, в трех из пяти заданий составители предполагали проверку материала по курсу IX класса. В то же время экзамен проигнорировал основные разделы курса X класса: «Показательная, логарифмическая и степенная функции» (45 ч), «Системы уравнений и неравенств» (26 ч), «Интеграл» (22 ч) и т. д. Таким образом, основные умения и навыки, выработанные учащимися за последний год обучения, фактически оказались непроверенными. Возникает сомнение в целесообразности такого набора экзаменационных заданий.

А. М. Гольдман, учитель московской школы № 463

Замечания к письму А. М. Гольдмана

В письме учителя А. М. Гольдмана подвергается критике содержание письменной экзаменационной работы, предложенной в прошлом году выпускникам московских классов с углубленным изучением математики. Резкая критическая оценка этой экзаменационной работы была дана и на страницах «Учительской газеты» в письме, подписанном шестьдесят одним московским учителем, а также в статье И. Овчинниковой «Вместо дискуссий — подвох», опубликованной в газете «Известия» 9 июля 1988 г. Разбор этой работы был проведен на заседании секции средней школы Московского математического общества в октябре 1988 г. по сообщению учителя Л. А. Литванчука.

Тексты обоих вариантов экзаменационной работы приведены в статье Л. И. Звавича и В. К. Смирновой, публикуемой в этом же номере журнала. Это дает возможность учителям математики самостоятельно и объективно проанализировать все задания. Думаю, что такой анализ будет полезен не только учителям, но и составителям экзаменационных работ как в РСФСР, так и в других союзных республиках.

Беглый просмотр работы может привести к мысли, что никаких особых, из ряда вон выходящих трудностей для учащихся классов с углубленным изучением математики она представить не должна. Ведь на вступительных экзаменах во многие вузы абитуриентам предлагают куда более сложные задания. В чем же дело? Почему именно эти задания вызвали такую бурю протестов, почему они поставили в тупик многих выпускников московских специальных школ и классов? Мне кажется, что дело здесь в том, что составители экзаменационных текстов и учителя математики имеют неодина-

ковые представления о целях классов с углубленным изучением математики, о сущности и задачах выпускного экзамена, о критериях, которым должна удовлетворять письменная экзаменационная работа. В связи с развитием дифференцированного обучения, которое сейчас принимает все больший и больший размах, нам необходимо четко осознать ответы на эти вопросы, особенно на первый из них.

Бытует мнение, что в классы с углубленным изучением математики принимаются только вундеркинды, что выпускники этих классов готовятся к будущей творческой деятельности в области математики. Отсюда и вывод: на экзамене учащиеся должны продемонстрировать свой творческий потенциал, они должны проявить смекалку, показать умение решать нестандартные задачи, способность «изобретать» неизвестные им методы. А отсюда недалеко уже и до представления о том, что на экзаменах в этих классах должны быть не обычные, решаемые на уроках задачи, а задания олимпиадного характера. Такой подход кажется мне неверным. Он может поставить учащихся этих классов в трудное положение, и они, зная программный материал школы на порядок лучше и глубже, чем выпускники обычных классов, получают искусственно заниженные оценки в аттестатах об общем среднем образовании. Примерно в такой ситуации и оказались выпускники московских классов с углубленным изучением математики в 1988 г.

По моему мнению, такие классы больше, чем обычные, соответствуют концепции непрерывного образования. Основная задача специализированных классов — как можно лучше сформировать у учащихся готовность к послешкольному общему и профессиональному образованию. Подавляющее большинство учащихся этих классов связывает свое будущее с профессиональным образованием в области естественных наук и техники. И только сравнительно небольшая часть выпускников этих классов будет в дальнейшем творчески работать в области математики. Поэтому основной контингент этих классов — это не вундеркинды-математики, а обычные подростки, проявляющие повышенный интерес к предметам естественно-математического цикла, с определенными математическими способностями и прочными знаниями курса математики восьмилетней школы. Отсюда главная задача учителя математики этих классов — развить эти способности в процессе глубокого и прочного изучения со школьниками учебной программы.

Мне представляется, что и выпускной экзамен здесь — это не конкурс, не олимпиада, а способ проверки усвоения учебной программы, которая в этих классах достаточно сложна. Поэтому главное требование к экзаменационным материалам состоит, пожалуй, в следующем: они должны соответствовать программе, позволять проверить усвоение всех ее основных разделов. Хорошо, если задачи, выносимые на экзамен, позволяют проверить уровень усвоения курса, глубину проникновения в материал, владение основными методами школьной

математики, умение применять наиболее рациональные из них в конкретной ситуации. Здесь необходим творческий подход и изобретательность составителя.

Мне представляется, что министерства народного образования (просвещения) должны разработать и довести до сведения учителей классов с углубленным изучением математики четко сформулированные цели и задачи этих классов, правила и порядок их комплектования, требования к выпускным экзаменационным работам. Составители же экзаменационных текстов должны руководствоваться этими требованиями, учитывая опыт учителей и постоянно советуясь с ними. Вот в чем видятся уроки письменного экзамена в Москве 1988 г.

Г. Д. Глейзер, и. о. председателя бюро секции
средней школы Московского математического общества
профессор

ЭКСПЕРИМЕНТ

Об уровне языкового развития учащихся VI—VII классов

Т. Н. Миракова (г. Орехово-Зуево)

Изложение школьного курса математики основано на совместном использовании словесной и символическо-графической форм описания учебного материала. Каждая из этих форм — это своеобразный язык, служащий для передачи информации. Поэтому добиться осознанного и точного понимания учебного материала можно лишь при условии одинаково высокой подготовки школьников к восприятию информации, закодированной каждым из этих способов.

Однако практика работы в школе убеждает нас в том, что пока еще многие учащиеся находятся в сильной зависимости от формы подачи информации. Например, семиклассники легко и точно понимают смысл задания: «Решить уравнение $0,5x = x^2 - 5$ ». Но многие из них не сразу осознают аналогичную цель в условии: «При каких значениях x верно равенство $0,5x = x^2 - 5$?» И наконец, почти все они испытывают самые серьезные затруднения при рассмотрении той же ситуации, но заданной словесно: «Найти число, половина которого меньше его квадрата на 5».

Разумеется, язык школьной математики не должен создавать дополнительных трудностей для восприятия, но отказываться от различных форм предъявления информации тоже не следует. Необходимо варьировать формы подачи учебного материала в зависимости от его содержания и уровня общеязыковой подготовки школьников.